

Induktive Statistik II

Martin Kolb

Universität Paderborn

22. Dezember 2021



Beispiel: ML-Schätzung

An die folgenden 10 Beobachtungen soll eine Poissonverteilung angepasst werden

15 14 19 20 23 25 24 11 15 18

Für die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$



Beispiel: ML-Schätzung

An die folgenden 10 Beobachtungen soll eine Poissonverteilung angepasst werden

15 14 19 20 23 25 24 11 15 18

Für die Poissonverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Bestimmung eines Schätzers mit der ML-Methode: Gegeben sei eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$. Wir stellen zunächst die Likelihood-Funktion auf.

$$L(x, \lambda) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{(x_i)!} \right)$$

$$\log(L(x, \lambda)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \log(\lambda) - \left(\sum_{i=1}^n \log((x_i)!) \right) - n\lambda$$

Bestimmung eines Kandidaten für Maximum:

$$\frac{d}{d\lambda} \log(L(x, \lambda)) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n \stackrel{!}{=} 0$$

$$\implies \lambda_{\text{ML}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i.$$

Es ist wiederum leicht zu sehen, dass in der Tat ein Maximum gefunden wurde. Im konkreten Fall

$$\lambda_{\text{ML}}(15, 14, 19, 20, \dots, 18) = \frac{1}{10} \cdot (15 + 14 + \dots + 18) = 18,4.$$



Beispiel: ML-Schätzung

In einer großen Stadt gibt es N Taxen, die die Nummern $\{1, \dots, N\}$ tragen. Ein Passant steht an einer vielbefahrenen Straße und beobachtet die Nummern x_1, \dots, x_n der vorbeifahrenden Taxen, wobei Wiederholungen ignoriert werden. Aufgrund dieser Daten soll die unbekannte Anzahl N der Taxen geschätzt werden.



Beispiel: ML-Schätzung

In einer großen Stadt gibt es N Taxen, die die Nummern $\{1, \dots, N\}$ tragen. Ein Passant steht an einer vielbefahrenen Straße und beobachtet die Nummern x_1, \dots, x_n der vorbeifahrenden Taxen, wobei Wiederholungen ignoriert werden. Aufgrund dieser Daten soll die unbekannte Anzahl N der Taxen geschätzt werden.

Unser Wahrscheinlichkeitsmodell sieht wie folgt aus:

$$\Omega = \{ \{x_1, \dots, x_n\} : x_i \in \{1, \dots, N\}, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j \}$$

$$\mathbb{P}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \binom{N}{n}^{-1}$$

Klar ist, dass $N \geq \max(x_1, \dots, x_n)$.

Beachte, dass $\binom{N}{n}^{-1}$ größer wird, wenn N kleiner wird \implies

$$T_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$$

Beispiel: ML-Schätzung

Die Grundgesamtheit X sei normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz $\sigma^2 = 1$. Für eine konkrete Stichprobe (x_1, \dots, x_n) vom Umfang n gilt:

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}}$$

Zur Bestimmung des ML-Schätzers betrachten wir:

$$\log \left(L(x_1, \dots, x_n, \mu) \right) = -n \log(\sqrt{2\pi}) + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2} \right)$$

$$\frac{d}{d\mu} \log \left(L(x_1, \dots, x_n, \mu) \right) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\iff \mu = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$



Der Kandidat ist also

$$\mu_{ML} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

Weiter prüft man leicht nach, dass

$$\mu_{ML} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

in der Tat eine Maximalstelle und somit der ML-Schätzer ist.



Die Differenz zwischen Schätzwert und dem wahren Parameter der Grundgesamtheit kann groß sein. Ist ein Schätzer konsistent, so weiß man zumindest, dass die Wahrscheinlichkeit für Abweichungen vom wahren Parameter für größer werdenden Umfang der Stichprobe gegen 0 konvergiert.



Definition (Konfidenzintervall)

Es sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n der Grundgesamtheit X . Sei $\alpha \in (0, 1)$ vorgegeben. Ein Intervall $(G_u^p(X_1, \dots, X_n), G_o^p(X_1, \dots, X_n))$ heißt **Konfidenzintervall** für den Parameter p mit Irrtumswahrscheinlichkeit α , wenn

$$\mathbb{P}\left(p \in \left(G_u^p(X_1, \dots, X_n), G_o^p(X_1, \dots, X_n)\right)\right) \geq 1 - \alpha$$

gilt. Dabei sind $G_u^p(X_1, \dots, X_n)$ und $G_o^p(X_1, \dots, X_n)$ Schätzer für die linke bzw. rechte Intervallgrenze sind.



Definition (Konfidenzintervall)

Einseitige Konfidenzintervalle

$$(G_u^p(X_1, \dots, X_n), \infty) \quad \text{bzw.} \quad (-\infty, G_o^p(X_1, \dots, X_n))$$

für Parameter p und Irrtumswahrscheinlichkeit α erfüllen

$$\mathbb{P}(p \in (G_u^p(X_1, \dots, X_n), \infty)) \geq 1 - \alpha,$$

$$\mathbb{P}(p \in (-\infty, G_o^p(X_1, \dots, X_n))) \geq 1 - \alpha.$$



Typische Werte für α sind:

$$\alpha = 0,001; 0,005; 0,01; 0,05$$



Definition (Quantil)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X und Verteilungsfunktion F_X . Sei $\gamma \in (0, 1)$. Dann heißt eine Zahl x_γ mit

$$F_X(x_\gamma) = \gamma$$

γ -**Quantil** von X bzw. F_X .



Definition (Quantil)

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte f_X und Verteilungsfunktion F_X . Sei $\gamma \in (0, 1)$. Dann heißt eine Zahl x_γ mit

$$F_X(x_\gamma) = \gamma$$

γ -Quantil von X bzw. F_X .

Ist X standardnormalverteilt, so werden von nun an γ -Quantile mit z_γ bezeichnet.



Konfidenzintervall im Gauss-Modell

Es sei X normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Varianz σ^2 . Sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n für die Grundgesamtheit X und sei $\alpha \in (0, 1)$ gegeben. Dann ist

$$\left(\bar{X} - \frac{Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

ein α -Konfidenzintervall für den Parameter μ .



Beweis

Wir wissen bereits, dass

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für den Parameter μ ist. Außerdem folgt aus den Resultaten in Kapitel 2, dass

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Es ist naheliegend ein Konfidenzintervall zu suchen, das symmetrisch um den erwartungstreuen Schätzer \bar{X} für den Parameter



Wir setzen

$$Z := \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Für Z suche c , so dass

$$\mathbb{P}(-c \leq Z \leq c) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-c \leq Z \leq c) &= \mathbb{P}(Z \leq c) - \mathbb{P}(Z \leq -c) = F_Z(c) - F_Z(-c) \\ &= \Phi(c) - \Phi(-c) \end{aligned}$$

Die Symmetrie der Normalverteilung liefert

$$\Phi(-c) = 1 - \Phi(c)$$



Also erhalten wir

$$\Phi(c) - \Phi(-c) = 2\Phi(c) - 1 \stackrel{!}{=} 1 - \alpha$$

und somit

$$\Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

d.h.

$$\boxed{c = Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}}$$



Beispiel:

Es soll ein Intervall bestimmt werden, so dass die mittlere Reißfestigkeit von Bremsseilen mit Wahrscheinlichkeit 0,95 im Intervall liegt. Wir nehmen an, dass die Reißfestigkeit normalverteilt ist bei bekannter Standardabweichung $10 \frac{N}{mm^2}$. Es ergeben sich 20 Messwerte:

95,5 79,1 79,4 ... 82,9 ... 77,8



Beispiel:

Es soll ein Intervall bestimmt werden, so dass die mittlere Reißfestigkeit von Bremsseilen mit Wahrscheinlichkeit 0,95 im Intervall liegt. Wir nehmen an, dass die Reißfestigkeit normalverteilt ist bei bekannter Standardabweichung $10 \frac{N}{mm^2}$. Es ergeben sich 20 Messwerte:

95,5 79,1 79,4 ... 82,9 ... 77,8

Es gilt

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \cdot (95,5 + 79,1 + \dots + 82,9 + \dots + 77,8) = 80,59$$

$$z_{\left(1 - \frac{0,05}{2}\right)} = z_{0,975} = 1,96, \quad \sigma = 10$$



Beispiel:

Es soll ein Intervall bestimmt werden, so dass die mittlere Reißfestigkeit von Bremsseilen mit Wahrscheinlichkeit 0,95 im Intervall liegt. Wir nehmen an, dass die Reißfestigkeit normalverteilt ist bei bekannter Standardabweichung $10 \frac{N}{mm^2}$. Es ergeben sich 20 Messwerte:

95,5 79,1 79,4 ... 82,9 ... 77,8

Es gilt

$$\bar{X} = \frac{1}{20} \cdot (95,5 + 79,1 + \dots + 82,9 + \dots + 77,8) = 80,59$$

$$z_{\left(1 - \frac{0,05}{2}\right)} = z_{0,975} = 1,96, \quad \sigma = 10$$

Damit ergibt sich das folgende Konfidenzintervall:

$$\left(80,59 - 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}}, 80,59 + 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} \right) = (76.2, 84.97)$$

Vom Standpunkt eines Qualitätskontrolleurs stelle man sich vor, dass die Bremsseile in den Verkauf gehen, wenn 95 Prozent der Seile eine Reißfestigkeit $\geq 75 \frac{N}{mm^2}$ besitzen. Dann bietet sich der Einsatz eines einseitigen Konfidenzintervalls an. Analoges Vorgehen wie bei zweiseitigen Konfidenzintervall: Das Intervall

$$\left(\bar{X} - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right)$$

ist ein einseitiges Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit α . Daten wie im obigen Beispiel und $\alpha = 0,05$.

Also, einseitiges Konfidenzintervall

$$(75,39, \infty)$$



Definition (t-Verteilung) und Satz

Es sei X eine normalverteilte Grundgesamtheit und sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n . Dann ist

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz.



Definition (t-Verteilung) und Satz

Es sei X eine normalverteilte Grundgesamtheit und sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n . Dann ist

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz.
Die Verteilung der Zufallsvariable

$$T_{n-1} := \frac{\bar{X} - \mu}{S} \cdot \sqrt{n}$$

heißt **Studentverteilung** oder **t-Verteilung** mit $n - 1$ Freiheitsgraden.



Die Dichte der t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden ist durch

$$f_{n-1}(x) := \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

gegeben. Dabei ist

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

die Gamma-Funktion.



Die Dichte der Studentverteilung ist symmetrisch um den Ursprung und approximiert für große Werte von n die Normalverteilung.

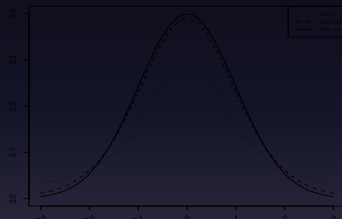


Abbildung: Dichte der t -Verteilung für $n = 1$, und $n = 10$. Für große Werte von n kann die Dichte der t -Verteilung gut durch die Normalverteilung approximiert werden

Satz: (Konfidenzintervall im Gaussmodell)

Es sei X eine normalverteilte Grundgesamtheit und sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n . Bezeichnet $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil einer studentverteilten Zufallsvariable mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden, so ist

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

ein Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit α für den Parameter $\mathbb{E}[X] = \mu$.



Satz: (Konfidenzintervall im Gaussmodell)

Es sei X eine normalverteilte Grundgesamtheit und sei X_1, \dots, X_n eine mathematische Stichprobe vom Umfang n . Bezeichnet $t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil einer studentverteilten Zufallsvariable mit $(n - 1)$ Freiheitsgraden, so ist

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

ein Konfidenzintervall mit Irrtumswahrscheinlichkeit α für den Parameter $\mathbb{E}[X] = \mu$. Einseitige Konfidenzintervalle sind

$$\left(\bar{X} - t_{1-\alpha, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, \infty \right) \quad \text{bzw.} \quad \left(-\infty, \bar{X} + t_{1-\alpha, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

Beispiel:

Um die Qualität einer Abfüllanlage zu beschreiben, soll ein Intervall angegeben werden, das mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0,95$ den Erwartungswert der Grundgesamtheit enthält. Angenommen sei, dass die Füllmenge X normalverteilt ist. Es liegt folgende konkrete Stichprobe vor:

549 | 547 | 549 | 549 | 545 | 550 | 550 | 545 | 550 | 544 | 543 | 549 | 548



Beispiel:

Um die Qualität einer Abfüllanlage zu beschreiben, soll ein Intervall angegeben werden, das mit Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha = 0,95$ den Erwartungswert der Grundgesamtheit enthält. Angenommen sei, dass die Füllmenge X normalverteilt ist. Es liegt folgende konkrete Stichprobe vor:

549 | 547 | 549 | 549 | 545 | 550 | 550 | 545 | 550 | 544 | 543 | 549 | 548

Berechne

$$\bar{X} = \frac{1}{13}(549 + 547 + \dots + 548) = 547,54$$

$$S^2 = \frac{1}{12}((549 - 547,54)^2 + \dots + (548 - 547,54)^2) \approx 2,179^2$$

Bestimme per Computer bzw. aus Tabellen $t_{12,0.975}(0.975)$.

(546,05, 549,03).



Beispiel:

Wir betrachten die Kaltmiete der acht Einzimmerwohnungen in der Nähe der Universität: Es liegt folgende konkrete Stichprobe vor:

270 | 460 | 512 | 550 | 360 | 399 | 419 | 390

Wir unterstellen, dass die Kaltmiete normalverteilt ist und wollen das Konfidenzintervall für μ mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ aufstellen.



Beispiel:

Wir betrachten die Kaltmiete der acht Einzimmerwohnungen in der Nähe der Universität: Es liegt folgende konkrete Stichprobe vor:

270 | 460 | 512 | 550 | 360 | 399 | 419 | 390

Wir unterstellen, dass die Kaltmiete normalverteilt ist und wollen das Konfidenzintervall für μ mit Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0.05$ aufstellen. Berechne hierfür

$$\bar{x} = 420 \quad \text{und} \quad s^2 = 7772,286$$

Mit $n = 8$ gilt also $s/\sqrt{n} = 31.17$ und es ist $t_{7,0975} = 2.3626$.
Folglich erhalten wir wegen

$$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}} = 73,7$$

und somit

$$[346.3, 493.7]$$

Bemerkung:

Die Länge L des Konfidenzintervals für μ im Gausmodell bei unbekannter Varianz ist:

$$L = 2 \cdot t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Das Konfidenzintervall wird breiter, wenn wir die Irrtumswahrscheinlichkeit α verkleinern.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Es soll ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ für die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses aufgestellt werden.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Es soll ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ für die Wahrscheinlichkeit p eines Ereignisses aufgestellt werden.

Beispiel:

In einem ZDF-Politbarometer wurden 1308 Personen befragt, welche Partei sie wählen würden, wenn am nächsten Sonntag Bundestagswahl wäre. Wir wollen ein Konfidenzintervall für den Anteil p der Wähler der SPD in der Bevölkerung aufstellen.

Wir gehen von den unabhängigen, identisch mit dem Parameter p Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n aus. Es liegt nahe, den für p erwartungstreuen und konsistenten Schätzer $\hat{p} := \bar{X}$ als Ausgangspunkt bei der Konstruktion des Konfidenzintervalls zu wählen.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Konstruktion mit Chebyshev:

$$T(X_1, \dots, X_n) = \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Für die Konstruktion eines Konfidenzintervalls machen wir folgenden natürlichen Ansatz

$$\left(T(X_1, \dots, X_n) - \epsilon, T(X_1, \dots, X_n) + \epsilon \right)$$

Für vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha \in (0, 1)$ ist nun $\epsilon > 0$ geeignet zu bestimmen.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Es ist

$$\mathbb{P} \left(\left| p - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right| \geq \epsilon \right) \leq \alpha.$$

zu erfüllen.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Es ist

$$\mathbb{P} \left(\left| p - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right| \geq \epsilon \right) \leq \alpha.$$

zu erfüllen.

Mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| p - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \right| \geq \epsilon \right) &\leq \frac{\text{Var}(\text{Bin}(p, n))}{n^2 \cdot \epsilon^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n \cdot \epsilon^2} \\ &\leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \epsilon^2} \end{aligned}$$



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Wählen wir nun ϵ mit der Eigenschaft, dass

$$4 \cdot n \cdot \epsilon^2 \cdot \alpha \geq 1, \quad \text{d.h.} \quad \epsilon \geq \frac{1}{2\sqrt{n \cdot \alpha}},$$

dann können wir folgern, dass

$$(\bar{X} - \epsilon, \bar{X} + \epsilon)$$

ein Konfidenzintervall für p mit Irrtumswahrscheinlichkeit α definiert.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Approximative Konstruktion nach Wald:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

approximativ normalverteilt mit Varianz

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}.$$

Da p unbekannt ist, ersetze p durch \hat{p} und nutze Formel im Gaussmodell:



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Approximative Konstruktion nach Wald:

Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist

$$\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

approximativ normalverteilt mit Varianz

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n}.$$

Da p unbekannt ist, ersetze p durch \hat{p} und nutze Formel im Gaussmodell:

$$\left[\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Die Konstruktion der Waldschen Konfidenzintervall erhalten Approximationen über den zentralen Grenzwertsatz und sind somit nicht im strikten Sinn Konfidenzintervalle.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Die Konstruktion der Waldschen Konfidenzintervall erhalten Approximationen über den zentralen Grenzwertsatz und sind somit nicht im strikten Sinn Konfidenzintervalle.

Dennoch liefert dieses Konstrktionsverfahren in einigen Fällen sehr gute Resultate, die jedoch immer nochmals zur geprüft werden sollten. Auf jeden Fall werde sie häufig genutzt.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Die Konstruktion der Waldschen Konfidenzintervall erhalten Approximationen über den zentralen Grenzwertsatz und sind somit nicht im strikten Sinn Konfidenzintervalle.

Dennoch liefert dieses Konstrktionsverfahren in einigen Fällen sehr gute Resultate, die jedoch immer nochmals zur geprüft werden sollten. Auf jeden Fall werde sie häufig genutzt.

Ihr Vorteil besteht sicherlich aber in der Einfachheit des Intervalls und der leichten Berechenbarkeit.



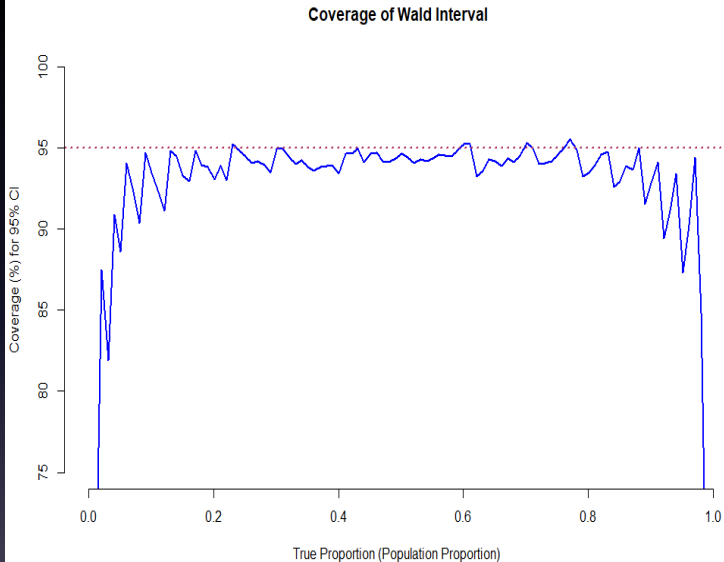


Abbildung: Überdeckungswahrscheinlichkeit

Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Beispiel:

Zurück zum einführenden Beispiel der Wahlumfrage.

Angenommen, von den 1308 Personen würden 288 die SPD wählen. Dann ist $\hat{p} = 0.22$. Wählen wir das Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.95$, dann ergibt sich mit $n = 1308$, $\hat{p} = 0.22$ und $z_{0.075} = 1.96$

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 0.22 - 1.96 \sqrt{\frac{0.22(1 - 0.22)}{1308}} = 0.198$$

und dann als Waldsches Konfidenzintervall

$$[0.198, 0.242]$$

Mit Wahrscheinlichkeit von 0.95 liegt der Wähleranteil der SPD zwischen 19.8 und 24.2 Prozent.

Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Bemerkung:

Die Länge L des Waldschen Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$ ist

$$L = 2z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$$

Angenommen wir möchten, dass zu vorgegebenen Konfidenzniveau $1 - \alpha$ die Länge des Konfidenzintervalls nicht größer als l ist. Schätzen wir wieder $\hat{p}(1 - \hat{p})$ durch $1/4$ ab so erhalten wir durch Wahl von n mit

$$n \geq \frac{z_{1-\alpha/2}^2}{l^2}$$

eine apriori Bedingung an die Größe der Stichprobe.

Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Beispiel:

Wie viele Personen muss man bei der Wahlumfrage mindestens befragen, so dass die Länge des Wald-Konfidenzintervalls für p zum Konfidenzniveau 0.99 höchstens 0.02 beträgt?

Es gilt $z_{0.995} = 2.576$, d.h. es muss gelten

$$n \geq \frac{2.576^2}{0.02^2} = 16589.44.$$

Man muss also mindestens 16590 Personen befragen.



Konfidenzintervalle im Bernoullimodell

Die Zufallsvariable

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

ist approximativ standardnormalverteilt. Es gilt also

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \leq \sqrt{n} \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \sim 1 - \alpha$$

Geschickte Umformung dieses Ausdrucks liefert für $z = z_{1-\alpha/2}$ das approximative Konfidenzintervall

$$\left(\frac{\hat{p} + \frac{z^2}{2n} - z \sqrt{\frac{z^2}{4n^2} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{1 + \frac{z^2}{n}}, \frac{\hat{p} + \frac{z^2}{2n} + z \sqrt{\frac{z^2}{4n^2} + \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{1 + \frac{z^2}{n}} \right)$$

Dieses Intervall nennt man auch **Wilson-Konfidenzintervall**.

Coverage of Wilson Score Interval without continuity correction

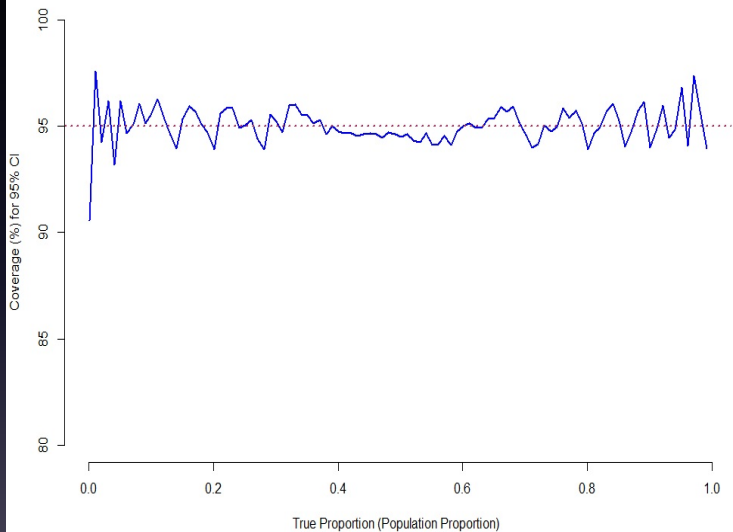


Abbildung: Überdeckungswahrscheinlichkeit

Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Clopper-Pearson-Konfidenzintervall: Für jedes $p \in (0, 1)$ und $\alpha \in (0, 1)$ wähle

$$c_{p,\alpha} := \min\{c \mid \mathbb{P}(X_p \leq c) \geq 1 - \alpha\}$$

und setze

$$A_p := \{0, \dots, c_{p,\alpha}\}.$$



Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Clopper-Pearson-Konfidenzintervall: Für jedes $p \in (0, 1)$ und $\alpha \in (0, 1)$ wähle

$$c_{p,\alpha} := \min\{c \mid \mathbb{P}(X_p \leq c) \geq 1 - \alpha\}$$

und setze

$$A_p := \{0, \dots, c_{p,\alpha}\}.$$

Das Komplement von A_p besteht aus allen Punkten, die wir bzgl. p für verdächtig groß halten:

$$x \in A_p \quad \text{genau, wenn} \quad \mathbb{P}(X_p \leq x - 1) < 1 - \alpha$$

Dies ergibt den $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich C_α mit

$$C_\alpha(x) = \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq x - 1) < 1 - \alpha\}.$$

Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Dies ergibt den $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich C_α mit

$$C_\alpha(x) = \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq x - 1) < 1 - \alpha\}.$$

Angenommen sei, dass

$$(0, 1) \mapsto \mathbb{P}(X_p \leq c)$$

monoton fallend ist.



Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Dies ergibt den $(1 - \alpha)$ -Konfidenzbereich C_α mit

$$C_\alpha(x) = \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq x - 1) < 1 - \alpha\}.$$

Angenommen sei, dass

$$(0, 1) \mapsto \mathbb{P}(X_p \leq c)$$

monoton fallend ist.

Dann ist $C_\alpha(x)$ von der Form

$$\{p \in [0, 1] \mid p > a_\alpha(x)\} \quad \text{oder} \quad \{p \in (0, 1) \mid p \geq a_\alpha(x)\}$$

für eine Schranke $a_\alpha(x)$.



Analog kann man bei verdächtig kleinen Werten vorgehen.

$$\begin{aligned}\bar{c}_{p,\alpha} &:= \max\{c \mid \mathbb{P}(X_p \geq c) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \max\{c \mid \mathbb{P}(X_p \geq c - 1) \leq \alpha\}\end{aligned}$$

Ein Wert x heißt verdächtig klein bzgl. p , wenn

$$x < \bar{c}_{p,\alpha} \iff \mathbb{P}(X_p \leq x) \leq \alpha.$$

Man erhält dann den Konfidenzbereich

$$\bar{C}_\alpha(x) := \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq x) > \alpha\}$$



Analog kann man bei verdächtig kleinen Werten vorgehen.

$$\begin{aligned}\bar{c}_{p,\alpha} &:= \max\{c \mid \mathbb{P}(X_p \geq c) \geq 1 - \alpha\} \\ &= \max\{c \mid \mathbb{P}(X_p \geq c - 1) \leq \alpha\}\end{aligned}$$

Ein Wert x heißt verdächtig klein bzgl. p , wenn

$$x < \bar{c}_{p,\alpha} \iff \mathbb{P}(X_p \leq x) \leq \alpha.$$

Man erhält dann den Konfidenzbereich

$$\bar{C}_\alpha(x) := \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq x) > \alpha\}$$

Dieser ist wieder mit Monotonieargument von der Form

$$\{p \in [0, 1] \mid p \leq b_{\alpha(x)}\} \quad \text{bzw} \quad \{p \in [0, 1] \mid p < b_{\alpha(x)}\}$$

für eine Schranke $b_\alpha(x)$.



Man kann beide Konfidenzbereiche kombinieren zum zweiseitigen Konfidenzbereich zur Irrtumswahrscheinlichkeit α durch

$$C_{\alpha/2}(x) \cap \bar{C}_{\alpha/2}(x) = [a_{\alpha/2}(x), b_{\alpha/2}(x)],$$

denn

$$\mathbb{P}(p \in [a_{\alpha/2}(X_p), b_{\alpha/2}(X_p)]) \leq \mathbb{P}(a_{\alpha/2}(X_p) \leq p) + \mathbb{P}(p \leq b_{\alpha/2}(X_p))$$



Lemma:

Sei $n \geq 1$, sei X_p eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parameterin n, p und sei $x \in \{0, \dots, n\}$. Dann ist für $x \neq 0$ die Funktion

$$p \mapsto \mathbb{P}(X_p \geq x)$$

stetig und streng wachsend auf $[0, 1]$.



Beweis:

Betrachte die Funktion

$$p \mapsto \mathbb{P}(X_p \leq x) = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \mathbb{P}(X_p \leq x) &= \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} (kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k(n-k)(1-p)^{n-k-1} \\ &= \sum_{l=0}^{x-1} n \binom{n-1}{l} p^{l-1}(1-p)^{n-1-l} - \sum_{k=0}^x n \binom{n-k}{k} p^k(1-p)^{n-k-1} \\ &= -n \binom{n-1}{c} p^c(1-p)^{n-1-c} < 0. \end{aligned}$$

Die Anwendung dieses Vorgehens bei der Konstruktion von Konfidenzintervallen im Binomialmodell liefert die sogenannten

Clopper-Pearson-Konfidenzintervalle.



Coverage of Clopper-Pearson (Exact) Interval

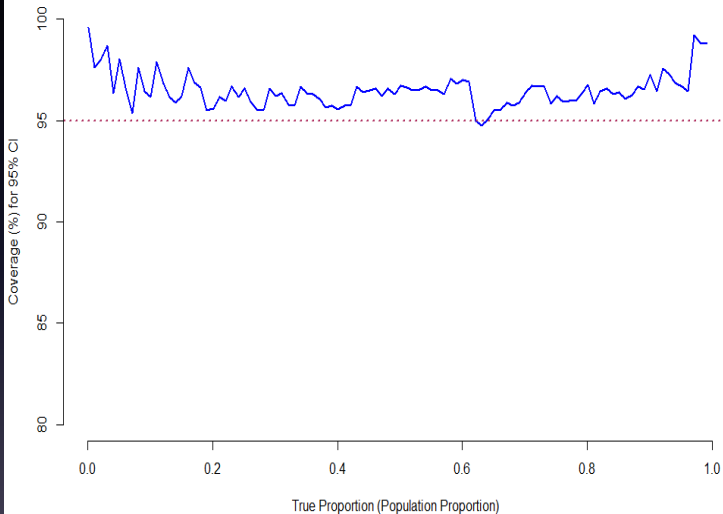


Abbildung: Überdeckungswahrscheinlichkeit

Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Beispiel:

Zurück zur Wahlprognose. Weil der Stichprobenumfang wieder klein im Vergleich zur Größe der Grundgesamtheit ist, gehen wir wieder von einer Binomialverteilung aus. Angebommen, wir haben $n = 20$ Personen befragt und setzen die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.1$.



Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Beispiel:

Zurück zur Wahlprognose. Weil der Stichprobenumfang wieder klein im Vergleich zur Größe der Grundgesamtheit ist, gehen wir wieder von einer Binomialverteilung aus. Angebommen, wir haben $n = 20$ Personen befragt und setzen die Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.1$.

Wir möchten den Anteil p_* der Wähler mit Stimme für Partei ABC nach unten abschätzen. Die Befragung hat 5 Wähler ergeben mit Stimme für Partei ABC. Man erhält dann aus einer Formelsammlung

$$a_{0.1}(5) \approx 0.1269,$$

d.h. mit einer Sicherheit von 90 Prozent ist der Wähleranteil von Partei ABC mindestens 0.1269.



Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Beispiel:

Bei der Produktion eines Massenartikels sei p_* die unbekannte Ausschussrate. Um sicherzustellen, dass diese nicht zu hoch ist, untersucht man n kürzlich produzierte Artikel und bestimmt den Anteil der fehlerhaften Stücke in dieser Stichprobe.

Angenommen, wir möchten die Ausschussrate p_* nach oben abschätzen. Sei X_p Bernoulli verteilt mit Parametern n und p .



Konfidenzintervall im Bernoullimodell

Beispiel:

Bei der Produktion eines Massenartikels sei p_* die unbekannte Ausschussrate. Um sicherzustellen, dass diese nicht zu hoch ist, untersucht man n kürzlich produzierte Artikel und bestimmt den Anteil der fehlerhaften Stücke in dieser Stichprobe.

Angenommen, wir möchten die Ausschussrate p_* nach oben abschätzen. Sei X_p Bernoulli verteilt mit Parametern n und p . Wenn von den n untersuchten Artikel keiner defekt war, ergibt sich der Konfidenzbereich

$$\bar{C}_\alpha = \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}(X_p \leq 0) = (1 - p)^n > \alpha\}$$

d.h.

$$\bar{C}_\alpha = [0, 1 - \alpha^{1/n}].$$

Man kann also mit einer Sicherheit von $1 - \alpha$ davon ausgehen, dass p_* kleiner als $1 - \alpha^{1/n}$ ist.

Testtheorie

Einführung:

Eine Lady behauptet, dass sie – wenn sie Tee probiert, der einen Zusatz Milch enthält – unterscheiden könne, ob zuerst Milch oder zuerst Tee eingegossen worden ist.



Testtheorie

Einführung:

Eine Lady behauptet, dass sie – wenn sie Tee probiert, der einen Zusatz Milch enthält – unterscheiden könne, ob zuerst Milch oder zuerst Tee eingegossen worden ist.

Der Lady soll n -mal die Aufgabe gestellt werden zwei Tassen, von denen eine vom Typ 1 und eine vom Typ 2 ist, korrekt zu klassifizieren. Die beiden Tassen werden ihr jeweils in einer zufälligen durch Münzwurf bestimmten Reihenfolge gegeben. Damit die Lady unabhängig von früheren Entscheidungen urteilen kann, wird jedes Teilexperiment an einem anderen Tag ausgeführt. X sei die Zahl der Tage, an denen sie die beiden Tassen richtig klassifiziert.



Als Modell für diese Versuchsanordnung bietet es sich an, X als binomialverteilt mit Parametern n und p anzunehmen. Die *Nullhypothese* entspricht dem Fall $p = 1/2$ und die *Alternative*, dass die Lady tatsächlich bessere Erfolgschancen hat, als es dem reinen Zufall entspricht, kann man durch $p > 1/2$ beschreiben.

Man nimmt also an, dass die Lady, wenn sie Recht hat, an jedem Tag unabhängig von den anderen Tagen mit der Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ einen Erfolg erzielt.



Das für die Versuchsanordnung gewählte Modell ist durch

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \quad \Theta = [1/2, 1], \quad \theta = p$$

und

$$\mathbb{P}_p(X = x) = b_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

beschrieben. Die Hypothese $H_0 = \{1/2\}$ und die Alternative $H_1 = (1/2, 1]$.



Das für die Versuchsanordnung gewählte Modell ist durch

$$\mathcal{X} = \{0, 1, \dots, n\}, \quad \Theta = [1/2, 1], \quad \theta = p$$

und

$$\mathbb{P}_p(X = x) = b_{n,p}(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

beschrieben. Die Hypothese $H_0 = \{1/2\}$ und die Alternative $H_1 = (1/2, 1]$.

Wir sind bereit unsere Nullhypothese zu verwerfen, wenn die Anzahl der Erfolge unwahrscheinlich hoch ist. Unseren Verwerfungsbereich wählen wir also der Form

$$R := \{x \in \mathcal{X} \mid x \geq t\}.$$



Es sei nun angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen, höchstens

$$\alpha = 0.05$$

betragen soll. Dann muss bei $n = 5$ notwendigerweise $t = 5$ gesetzt werden, denn es gilt

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 > \alpha$$

und

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 5) \leq \alpha.$$



Es sei nun angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, die Nullhypothese fälschlicherweise zu verwerfen, höchstens

$$\alpha = 0.05$$

betragen soll. Dann muss bei $n = 5$ notwendigerweise $t = 5$ gesetzt werden, denn es gilt

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 > \alpha$$

und

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 5) \leq \alpha.$$

Die Hypothese wird also nur verworfen, wenn die Lady alle 5 Paare richtig klassifiziert.



Wurde $\alpha = 0.05$ gewählt und $n = 20$ so gilt

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 14) \approx 0.0577$$

und

$$\mathbb{P}_{1/2}(X \geq 15) \approx 0.0207.$$

Also ist

$$R := \{15, 16, \dots, 20\}$$

ein zulässiger Verwerfungsbereich.



Grundbegriffe der Testtheorie

Im Folgenden \mathcal{X} die Menge der möglichen Werte einer Zufallsvariablen X und $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ sei die Menge der in Betracht gezogenen Verteilungen von X .



Grundbegriffe der Testtheorie

Im Folgenden \mathcal{X} die Menge der möglichen Werte einer Zufallsvariablen X und $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ sei die Menge der in Betracht gezogenen Verteilungen von X .

Durch Übergang zum Bildraum können wir immer annehmen, dass X die Identität auf \mathcal{X} ist. Sei Θ die disjunkte Vereinigung von Θ_0 und Θ_1 .



Grundbegriffe der Testtheorie

Im Folgenden \mathcal{X} die Menge der möglichen Werte einer Zufallsvariablen X und $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ sei die Menge der in Betracht gezogenen Verteilungen von X .

Durch Übergang zum Bildraum können wir immer annehmen, dass X die Identität auf \mathcal{X} ist. Sei Θ die disjunkte Vereinigung von Θ_0 und Θ_1 .

Ein **Test** ist eine Entscheidungsregel, die für jeden möglichen Wert x von X festlegt, ob man sich für die **Nullhypothese**

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

oder für die **Alternative**

$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

entscheidet.



Die Entscheidung für H_0 nennt man Annahme der Nullhypothese, die Entscheidung für die Alternative nennt man Verwerfen der Nullhypothese. Ein Test ist also beschrieben durch die Angabe der Menge R derjenigen x , für die die Hypothese verworfen werden soll.

R heißt auch **Verwerfungsbereich** oder **kritischer Bereich**.



Es sind zwei Arten von Fehlern möglich:

- **Fehler erster Art:** $\theta \in \Theta_0$ und die Hypothese wird verworfen.
- **Fehler zweiter Art:** $\theta \in \Theta_1$ und die Hypothese H_0 wird nicht verworfen.



Es sind zwei Arten von Fehlern möglich:

- **Fehler erster Art:** $\theta \in \Theta_0$ und die Hypothese wird verworfen.
- **Fehler zweiter Art:** $\theta \in \Theta_1$ und die Hypothese H_0 wird nicht verworfen.

In den Anwendungen gibt man R mit Hilfe einer 'Statistik' $T(x)$ an. Man wählt T oft so, dass besonders große Werte von T gegen die Nullhypothese sprechen. Also

$$R := \{x \mid T(x) > t\}.$$



Wir sagen, dass der Test **Niveau** $\alpha \in (0, 1)$ hat, wenn für alle $\theta \in \Theta_0$ gilt

$$\beta(\theta) := \mathbb{P}_\theta(X \in R) \leq \alpha,$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art ist dann beschränkt durch α .



Wir sagen, dass der Test **Niveau** $\alpha \in (0, 1)$ hat, wenn für alle $\theta \in \Theta_0$ gilt

$$\beta(\theta) := \mathbb{P}_\theta(X \in R) \leq \alpha,$$

die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art ist dann beschränkt durch α .

Für $\theta \in \Theta_1$ heisst

$$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X \in R)$$

die **Macht** des Tests in θ . Ist die Macht $\beta(\theta)$ nahe 1, so ist die Wahrscheinlichkeit

$$1 - \beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X \notin R)$$

eines Fehlers zweiter Art klein.



Wir nehmen an, dass die Grundgesamtheit X normalverteilt ist mit bekannter Varianz σ^2 und unbekanntem Mittelwert und wir untersuchen

$$H_0 : \mathbb{E}[X] = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbb{E}[X] \neq \mu_0.$$



Wir nehmen an, dass die Grundgesamtheit X normalverteilt ist mit bekannter Varianz σ^2 und unbekanntem Mittelwert und wir untersuchen

$$H_0 : \mathbb{E}[X] = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbb{E}[X] \neq \mu_0.$$

Für eine mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n ist die Zufallsvariable

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \quad \text{wobei} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

unter der Annahme von H_0 standardnormalverteilt, d.h. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



Wir nehmen an, dass die Grundgesamtheit X normalverteilt ist mit bekannter Varianz σ^2 und unbekanntem Mittelwert und wir untersuchen

$$H_0 : \mathbb{E}[X] = \mu_0 \quad \text{gegen} \quad \mathbb{E}[X] \neq \mu_0.$$

Für eine mathematische Stichprobe X_1, \dots, X_n vom Umfang n ist die Zufallsvariable

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}, \quad \text{wobei} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

unter der Annahme von H_0 standardnormalverteilt, d.h. $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

\bar{X} ist ein erwartungstreuer Schätzer von $\mathbb{E}[X]$. Ist also $|\bar{X} - \mu_0|$ groß, so ist man eher geneigt, die Hypothese H_0 zu verwerfen.

Ist das Niveau α spezifiziert, so können wir durch Wahl von

$$R : \{|Z| > z_{1-\alpha/2}\}$$

sicherstellen, dass unter der Annahme von H_0

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{|Z| \leq z_{1-\alpha/2}\}) &= \Phi(z_{1-\alpha/2}) - \Phi(-z_{1-\alpha/2}) \\ &= 2\Phi(z_{1-\alpha/2}) - 1 = 1 - \alpha.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler erster Art ist also

$$\mathbb{P}(\{|Z| > z_{1-\alpha/2}\}) = \alpha.$$



Gaußtest

Annahmen: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt sei. Es gelte also $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$



Gaußtest

Annahmen: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt sei. Es gelte also $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

Hypothesen:

- a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
- c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$



Gaußtest

Annahmen: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt sei. Es gelte also $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

Hypothesen:

- a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
- c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

Teststatistik:

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

wobei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.



Gaußtest

Annahmen: Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei σ^2 bekannt sei. Es gelte also $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$

Hypothesen:

- a) $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- b) $H_0 : \mu \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu < \mu_0$
- c) $H_0 : \mu \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \mu > \mu_0$

Teststatistik:

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n},$$

wobei $\bar{X} := \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$.

Ablehnungskriterium für H_0 bei Niveau α :

- a) $|Z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- b) $Z < z_\alpha$
- c) $Z > z_{1-\alpha}$



Beispiel für Gaußtest

Ein Abfüllautomat befüllt Packungen, die 500 g beinhalten soll. Es wird angenommen, dass die Füllmenge normalverteilt ist, wobei die Varianz $\sigma^2 = 1,5^2$ bekannt ist.

$$H_0 : \mathbb{E}[X] = 500, \quad H_1 : \mathbb{E}[X] \neq 500$$

Es wurde die folgende Stichprobe ermittelt:

499	500	498	500	498	498	498	498	495	499
500	496	499	497	500					

Sei $\alpha = 0,01$, dann ist $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.



Beispiel für Gaußtest

Ein Abfüllautomat befüllt Packungen, die 500 g beinhalten soll. Es wird angenommen, dass die Füllmenge normalverteilt ist, wobei die Varianz $\sigma^2 = 1,5^2$ bekannt ist.

$$H_0 : \mathbb{E}[X] = 500, \quad H_1 : \mathbb{E}[X] \neq 500$$

Es wurde die folgende Stichprobe ermittelt:

499 500 498 500 498 498 498 498 495 499
500 496 499 497 500

Sei $\alpha = 0,01$, dann ist $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.58$.

Damit ist der Akzeptanzbereich

$$I = \left(500 - 2,58 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{3,87}}, 500 + 2,58 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{3,87}} \right)$$

Prüfe, ob $\bar{X} = \frac{1}{15}(499 + \dots + 500) \in I$.

Für den letzten Schritt im Beispiel beachte, dass

$$\begin{aligned} Z \in (-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}) &\iff \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \in (-z_{1-\frac{\alpha}{2}}, z_{1-\frac{\alpha}{2}}) \\ &\iff \bar{X} \in \left(\mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \\ &\iff \bar{X} \in I \end{aligned}$$

